TD3

exercice 1

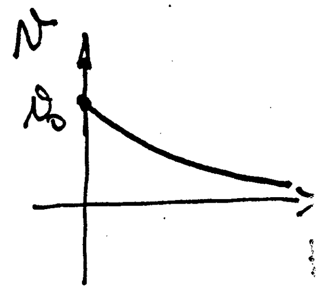
$$m \frac{dv}{dt} = - \lambda v^2$$

$$\frac{dv}{v^2} = - \frac{\lambda}{m} dt$$

$$\int_{v_0}^{v} \frac{dv}{v^2} = - \frac{\lambda}{m} \int_0^t dt$$

$$- \frac{1}{v} + \frac{1}{v_0} = - \frac{\lambda}{m} t \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{v} = \frac{\lambda}{m} t + \frac{1}{v_0}$$

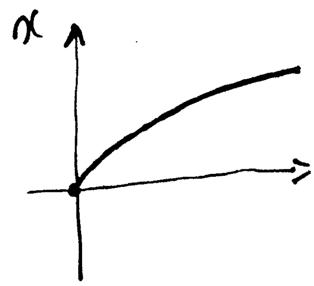
$$\Leftrightarrow \quad v(t) = \frac{v_0}{1 + \frac{v_0 \lambda t}{m}}$$



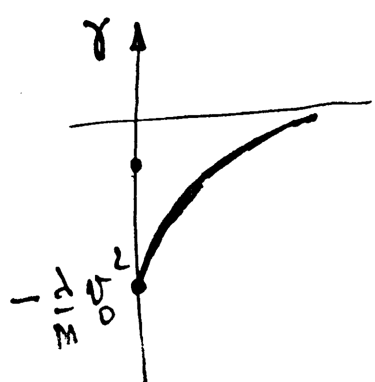
$$\frac{dx}{dt} = \frac{v_0}{1 + \frac{v_0 \lambda t}{m}} \quad \rightarrow \int_0^x dx = \int_0^t \frac{v_0}{1 + \frac{v_0 \lambda t}{m}} dt$$

$$= \frac{m v_0}{\lambda v_0} \int_0^{\frac{v_0 \lambda}{m} t} \frac{du}{1+u}$$

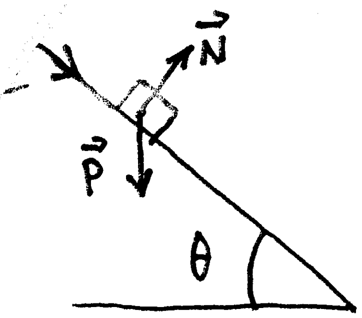
$$= \frac{m}{\lambda} \ln \left(\frac{1 + \frac{v_0 \lambda}{m} t}{1} \right)$$



$$\gamma = \frac{dv}{dt} = - \frac{v_0^2 \frac{\lambda}{m}}{\left(1 + \frac{v_0 \lambda}{m} t\right)^2} = - \frac{\lambda/m \, v_0^2}{\left(1 + \frac{v_0 \lambda}{m} t\right)^2}$$



La vitesse de m decroît toujours
sans s'annuler pour des temps finis. m



$$\vec{a} = \overbrace{g \sin\theta}^{a} \; \vec{i}$$

l'accélération est constante. Le mvt est suivant un axe, la composante v de la vitesse est donc donné par

$$v = at + v_0$$

à $t=0$ $v=0$, donc $v_0 \equiv 0$.

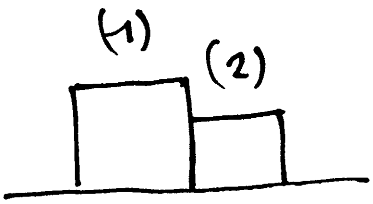
$$\boxed{v = g\sin\theta \; t}$$

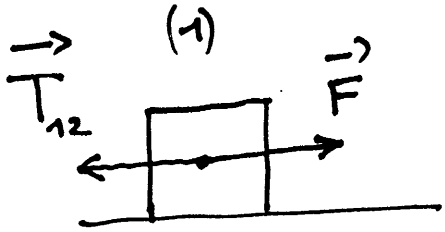
la distance est donnée par

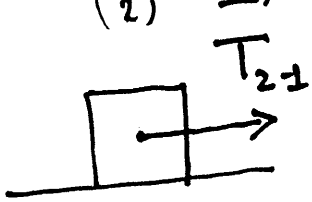
$$d = \frac{1}{2} a t^2 + v_0 t$$

d'où $\boxed{d = \frac{1}{2} g \sin\theta \; t^2}$

Exercice 3







bloc (1) $\quad \vec{F} + \vec{T}_{12} = M_1 \, \vec{a}_1$

bloc (2) $\quad \vec{T}_{21} = M_2 \, \vec{a}_2$

3eme principe $\quad \vec{T}_{12} = -\vec{T}_{21}$

on a $\vec{a}_1 = \vec{a}_2 = \vec{a}$ 1 accélération pour les 2 blocs (liaison rigide)

en mettant $\vec{T}_{12} = -\vec{T}_{21} = -M_2\,\vec{a}$ dans l'éq. (1)

on obtient

$$\vec{F} = (M_1 + M_2)\,\vec{a}$$

d'où

$$\vec{a} = \frac{1}{M_1+M_2}\,\vec{F}$$

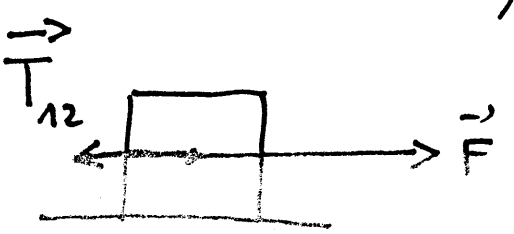
en mettant $\vec{a}$ dans l'éq. (2)

$$\vec{T}_{21} = \frac{M_2}{M_1+M_2}\,\vec{F}$$

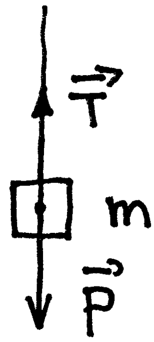
d'où d'après le 3ème principe

$$\vec{T}_{12} = -\frac{M_2}{M_1+M_2}\,\vec{F}$$

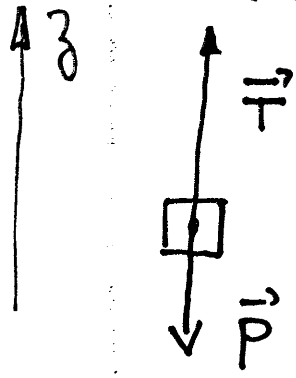
$$|\vec{T}_{12}| = \frac{M_2}{M_1+M_2}\,|\vec{F}| < |\vec{F}|$$



ercice 4



dirigé vers le haut :



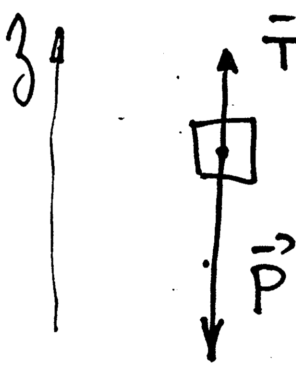
$g>0$

$$\vec{P}+\vec{T}=M\vec{a}$$

$$-Mg+T=Ma$$

$$\boxed{T=M(a+g)}$$

dirigé vers le bas :



$g>0$

$$\vec{P}+\vec{T}=M\vec{a}$$

$$-Mg+T=-M|a|$$

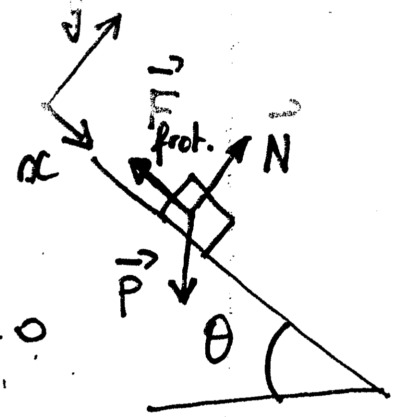
$$\boxed{T=M(g-|a|)}$$

où l'on a écrit : * $\vec{a}=a\,\vec{e_z}$ avec $a>0$ lorsque l'accélération est dirigée vers le haut et $a<0$ lorsque l'accélération est dirigée vers le bas.

* $\vec{P}=-Mg\,\vec{e_z}$ puisque $g>0$

* $\vec{T}=T\,\vec{e_z}$

...rcice 5



$\vec{F}_{frot} + \vec{N} + \vec{P} = 0$

pour $\theta \leq \theta_0$

$\vec{N} = N\,\vec{e}_y \quad N > 0$

$\vec{F}_{frot} = + F_{frot}\,\vec{e}_x$

où $|F_{frot}| \leq H_s |N|$

pour $\theta \leq \theta_0$

$\vec{P} = Mg\left(\sin\theta\,\vec{e}_x - \cos\theta\,\vec{e}_y\right)$

$g > 0$

$F_{frot} + Mg\sin\theta = 0 \iff F_{frot} = -Mg\sin\theta$

$N - Mg\cos\theta = 0 \iff N = Mg\cos\theta$

on obtient que $F_{frot} < 0$ et $N > 0$ comme on l'attend (cf. schéma)

L'équilibre est réalisé tant que

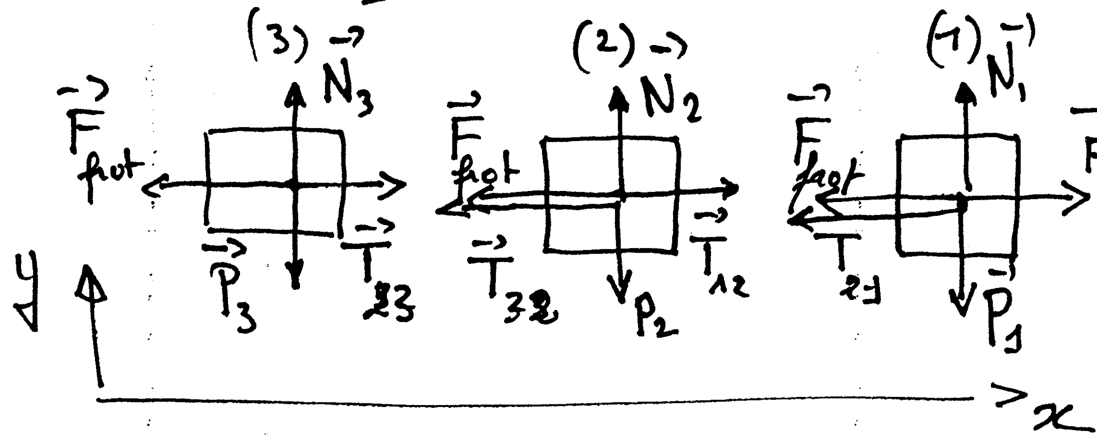
$$|F_{frot}| = Mg\sin\theta \leq H_s |N| = H_s Mg\cos\theta$$

Soit $\sin\theta \leq H_s \cos\theta \iff \tan\theta \leq H_s$.

Lorsque $\boxed{\tan\theta_0 = H_s}$ l'équilibre est rompu et la masse descend le long du plan incliné

H_5 .

exerce 6



$\vec{F} = F\,\vec{e}_x$; $\vec{F}_{frot} = F_{frot}\,\vec{e}_x$; $\vec{T}_{ij} = T_{ij}\,\vec{e}_x$

$\vec{P}_i = -M_i\, g\, \vec{e}_y \quad g>0$; $\vec{N}_i = N_i\,\vec{e}_y$, $\vec{a}_i = a_i\,\vec{e}_x$

Masse 1

$\vec{F} + \vec{F}_{frot} + \vec{T}_{21} = M_1\,\vec{a}_1 \iff F + F_{frot} + T_{21} = M_1 a_1$

$\vec{P}_1 + \vec{N}_1 = \vec{0} \iff N_1 = M_1 g > 0$

Masse 2

$\vec{F}_{frot} + \vec{T}_{12} + \vec{T}_{32} = M_2\,\vec{a}_2 \iff F_{frot} + T_{12} + T_{32} = M_2 a_2$

$\vec{P}_2 + \vec{N}_2 = \vec{0} \iff N_2 = M_2 g > 0$

Masse 3

$\vec{F}_{frot} + \vec{T}_{23} + = M_3\,\vec{a}_3 \iff F_{frot} + T_{23} = M_3 a_3$

$$\vec{T}_{21} + \vec{T}_{12} = \vec{0} \iff T_{21} + T_{12} = 0$$

$$\vec{T}_{32} + \vec{T}_{23} = \vec{0} \iff T_{32} + T_{23} = 0$$

$$\underbrace{\vec{a}_1 = \vec{a}_2 = \vec{a}_3}_{\text{barre rigide}} \iff a_1 = a_2 = a_3 = a$$

Il y a 7 inconnues et 7 equations, le problème est donc soluble.

Ces 7 eq. ~~[illegible]~~ se reduisent en 3 eq. avec 3 inconnues T_{21}, T_{32} et a.

$$\begin{cases} F + F_{frot} + T_{21} = M_1 a \\ F_{frot} - T_{21} + T_{32} = M_2 a \\ F_{frot} - T_{32} = M_3 a \end{cases}$$

$$\begin{cases} M_1 a - T_{21} = F + F_{frot} & (1) \\ M_2 a + T_{21} - T_{32} = F_{frot} & (2) \\ M_3 a + T_{32} = F_{frot} & (3) \end{cases}$$

En faisant (1)+(2)+(3) on obtient

$$(M_1 + M_2 + M_3)\, a = F + 3 F_{frot}$$

Soit $$a = \frac{F + 3F_{frot}}{M_1+M_2+M_3}$$

en injectant cette expression de a dans (1) on obtient :

$$\frac{1}{3} \leftarrow \underbrace{\frac{M_1}{M_1+M_2+M_3}\left(F + 3F_{frot}\right) - \left(F + F_{frot}\right)}_{-\frac{M_2+M_3}{M_1+M_2+M_3} F + \frac{2M_1-M_2-M_3}{M_1+M_2+M_3} F_{frot}} = T_{21}$$

$$\boxed{-\frac{2}{3}F = T_{21}}$$

puis en faisant de m̂ dans (3) on obtient

$$1/3 \leftarrow \underbrace{\frac{M_3}{M_1+M_2+M_3}\left(F + 3F_{frot}\right) - F_{frot}}_{\frac{M_3}{M_1+M_2+M_3} F - \frac{M_1+M_2-2M_3}{M_1+M_2+M_3} F_{frot}} = -T_{32} = T_{23}$$

$$\boxed{\frac{F}{3} = T_{23}}$$

Application numerique

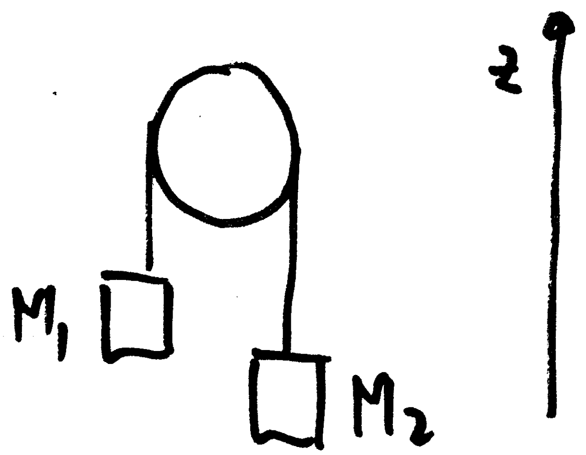
$F_{frot} = -10^3\ N$

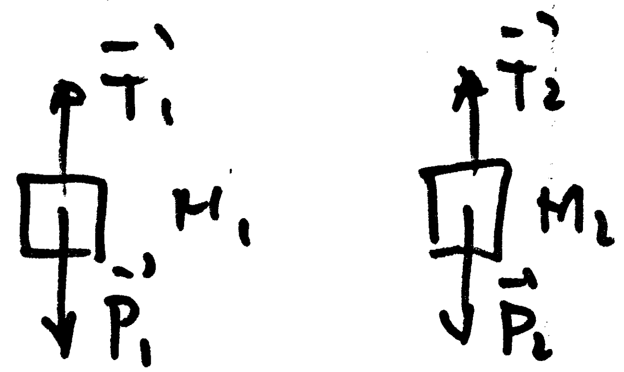
$F = 4{,}8\ 10^4\ N$

$$\boxed{\begin{aligned} T_{23} &= 1{,}6\ N \\ T_{21} &= -3{,}2\ N \end{aligned}}$$

Remarque : La force de frottement intervient dans l'expression de a mais pas dans les forces de traction des wagons lorsque ceux-ci sont de m̂ masse.

Exercice 7





Eq. du Mvt pour chaque Masse

$$\vec{P}_1 + \vec{T}_1 = M_1 \vec{a}_1 \qquad (1)$$

$$\vec{P}_2 + T_2 = M_2 \vec{a}_2 \qquad (2)$$

ficelle sans masse + principe action-réaction $\Rightarrow$ $\vec{T}_1 = \vec{T}_2$ (3)

ficelle inextensible $\Rightarrow$ $\vec{a}_1 = -\vec{a}_2$ (4)

$\vec{T}_i = T_i \, \vec{e}_z$ $\quad \vec{P}_i = -M_i \, g \, \vec{e}_z \quad g > 0$

$i = 1, 2$

$\vec{a}_i = a_i \, \vec{e}_z$

Soit d'après (3) $\quad T_1 = T_2 = T$

(4) $\quad a_1 = -a_2 = a$

d'où d'après (1) et (2)

$$-M_1 g + T = M_1 a \qquad (1)^{bis}$$

$$-M_2 g + T = -M_2 a \qquad (2)^{bis}$$

En faisant $(2)^{bis} - (1)^{bis}$ on obtient :

$$(M_1 - M_2) g = -(M_1 + M_2) a$$

$$\Leftrightarrow \boxed{a = \frac{M_2 - M_1}{M_1 + M_2} g.}$$

Si $M_2 > M_1$ $\quad a > 0 \quad \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 > 0 \\ a_2 < 0 \end{cases}$

Si $M_1 > M_2$ $\quad a < 0 \quad \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 < 0 \\ a_2 > 0 \end{cases}$

Si $M_1 = M_2$ $\quad a = 0$

Tension dans la ficelle :

on reporte l'expression de a dans $(1)^{bis}$

$$-M_1 g + T = M_1 \frac{M_2 - M_1}{M_1 + M_2} g$$

$$T = \frac{2 M_1 M_2}{M_1 + M_2} g > 0 \qquad \text{si } M_1 = M_2 = M \Rightarrow T = Mg$$